

## РОЗРАХУНОК ТОНКОШАРОВИХ ГУМОМЕТАЛЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ТА СПОРУД З УРАХУВАННЯМ СТИСЛИВОСТІ МАТЕРІАЛУ

<sup>1</sup>Булат А.Ф., <sup>1</sup>Дирда В.І., <sup>1</sup>Новікова А.В., <sup>2</sup>Гребенюк С.М., <sup>3</sup>Лاپін В.О.,  
<sup>4</sup>Мар'єнков М.Г.

<sup>1</sup>Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, <sup>2</sup>Запорізький національний університет, <sup>3</sup>Казахський науково-дослідний і проектний інститут будівництва й архітектури, <sup>4</sup>ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій»

## РАСЧЕТ ТОНКОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН И СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

<sup>1</sup>Булат А.Ф., <sup>1</sup>Дырда В.И., <sup>1</sup>Новикова А.В., <sup>2</sup>Гребенюк С.М., <sup>3</sup>Лопин В.А.,  
<sup>4</sup>Марьянков М.Г.

<sup>1</sup>Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины, <sup>2</sup>Запорожский национальный университет, <sup>3</sup>Казахский научно-исследовательский и проектный институт строительства и архитектуры, <sup>4</sup>ГП «Государственный научно-исследовательский институт строительных конструкций»

## CALCULATION OF THIN-LAYER RUBBER-METAL ELEMENTS OF MACHINES AND BUILDINGS CONSIDERING THE COMPRESSIBILITY OF THE MATERIAL

<sup>1</sup>Bulat A.F., <sup>1</sup>Dyrda V.I., <sup>1</sup>Novikova A.V., <sup>2</sup>Grebenyuk S.M., <sup>3</sup>Lapin V.A.,  
<sup>4</sup>Marienkov M.H.

<sup>1</sup>Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of NAS of Ukraine, <sup>2</sup>Zaporizhzhia National University, <sup>3</sup>Kazakh Research and Design Institute of Construction and Architecture, <sup>4</sup>SE "State Scientific-Research Institute of Building Constructions"

**Анотація.** У деяких конструкціях з гумометалевими елементами гума навантажується таким чином, що гідростатичне напруження у десять разів більше за напруження зсуву. У цьому випадку ігнорування стисливості гуми може призвести до великих помилок при розрахунку пружних та міцнісних параметрів гумових виробів. До пружних елементів, для яких урахування стисливості матеріалу є суттєвим, відносяться тонкошарові гумометалеві елементи, у яких розміри в плані значно більші за товщину. Такі гумометалеві елементи використовуються для вібросейсмозахисту важких машин, будівель та споруд.

У даній роботі розглянуто стиск тонкошарового циліндричного гумометалевого елемента з урахуванням стисливості матеріалу. При розрахунку прийняті припущення, що гідростатичне напруження постійне по товщині гумового шару, а також що швидкістю зміни компонент переміщення у серединній поверхні шару можна знехтувати у порівнянні з відповідною швидкістю у напрямі нормалі до шару. Ці припущення обґрунтовані в результаті аналізу геометрії деформації та умов рівноваги тонкого шару гуми, скріпленого з металевою арматурою.

У результаті застосування цих припущень до розв'язання поставленої задачі отримано граничну задачу для звичайного неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку. Відповідне однорідне рівняння розв'язане за допомогою ступеневого ряду, коефіцієнти якого виражені через попередні за допомогою рекурентної формули. Остаточно для гідростатичного напруження отримано формулу з модифікованою функцією Бесселя першого роду. Аналіз отриманої формули призводить до деяких спрощень для різних значень безрозмірного параметру, що пов'язує об'ємний модуль і модуль зсуву гуми, а також радіус циліндричного елемента та його товщину.

Отримане повне осьове навантаження на гумовий елемент представлено силою, що сприймалася б елементом при одноосовій деформації, тобто якщо б переміщення у поперечних перерізах були заборонені та стиск здійснювався б лише за рахунок зміни об'єму, помноженою на деякий коефіцієнт, менший за одиницю, що враховує зменшення жорсткості елемента за рахунок деформації зсуву.

В роботі наведені також результати експериментальних досліджень, виконаних авторами, для тонкошарових циліндричних гумометалевих елементів з середньонаповненої гуми 2959. Наведено приклад розрахунку осьового навантаження на тонкошаровий елемент з урахуванням стисливості гуми. Отримане значення осьового навантаження співпадає з результатами експерименту з достатнім значенням точності.

**Ключові слова:** тонкошаровий гумометалевий елемент, стисливість гуми, гідростатичне напруження, осьове навантаження

**Вступ.** Традиційний підхід до розрахунку гуми як нестисливого матеріалу для тонкошарових гумових елементів може призвести до суттєвих помилок при оцінці пружних та міцнісних властивостей деталей, оскільки гідростатичне напруження в них у багато разів перевищує напруження зсуву. Стиск тонких шарів гуми, скріплених з металевою арматурою, був розглянутий В.Л. Бідерманом і Г.В. Мартяною у роботі [1] на основі припущення про постійність об'єму гуми. Автори робіт [2, 3] розглянули особливості розрахунку гумометалевих елементів різної конфігурації з урахуванням фізичної нелінійності. У цих роботах наведені також результати експериментальних досліджень шаруватих гумометалевих елементів циліндричної форми.

**Постановка задачі.** В результаті аналізу геометрії деформації та умов рівноваги в роботі [1] було встановлено, що гідростатичне напруження можна вважати постійним по товщині гумового шару, а також що швидкість зміни компонент переміщення у напрямі нормалі до шару суттєво більша, ніж по серединній поверхні шару.

Нижче наведений розрахунок тонкошарового циліндричного гумового елемента, заснований на цих положеннях, котрі справедливі і для слабкостисливого матеріалу.

**Основна частина.** Введемо циліндричну систему координат  $(r, \varphi, z)$ . Компоненти переміщення позначимо відповідно  $u_r, u_\varphi, u_z$ .

Співвідношення Коші в циліндричних координатах мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) \right], & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Відповідно до прийнятої оцінки швидкості зміни переміщень приймемо:

$$\varepsilon_{rz} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\varphi z} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Деформація  $\varepsilon_{r\varphi}$  на основі тієї ж оцінки мала в порівнянні з  $\varepsilon_{rz}$  і  $\varepsilon_{\varphi z}$ .

Тоді на основі закону Гука та виразів (2) для дотичних напружень маємо:

$$\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \approx G \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \sigma_{\varphi z} = 2G\varepsilon_{\varphi z} \approx G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} \approx 0. \quad (3)$$

Нормальні напруження представлені гідростатичним напруженням, постійним по товщині шару:

$$\sigma_{rr} \approx \sigma_{\varphi\varphi} \approx \sigma_{zz} \approx \sigma(r, \varphi). \quad (4)$$

Запишемо рівняння рівноваги в циліндричних координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + F_\varphi = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Враховуючи те, що  $F_r = F_\varphi = 0$ , та вираз (4), перші два рівняння (5) переписуються так:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

або, з урахуванням закону Гука

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + G \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + G \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Звідси отримуємо

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = -G^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial r}; \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = -G^{-1} r^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (8)$$

Інтегруючи вирази (8) по  $z$ , приходимо до таких співвідношень:

$$\begin{cases} u_r = -G^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_3; \\ u_\varphi = -G^{-1} r^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_4. \end{cases} \quad (9)$$

Враховуючи той факт, що при  $z = \pm \frac{h}{2}$  шар скріплений з металевою арматурою, тобто  $u_r = u_\varphi = 0$ , для постійних інтегрування отримуємо вирази:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = G^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{h^2}{8}, \quad C_4 = G^{-1} r^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{h^2}{8}. \quad (10)$$

Тоді остаточно для компонент переміщення маємо:

$$\begin{cases} u_r = G^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right); \\ u_\varphi = G^{-1} r^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Враховуючи співвідношення Коші (1), для відносного об'ємного розширення маємо:

$$\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (12)$$

Підставляючи сюди вирази для переміщень (11), отримуємо:

$$\begin{aligned} \theta &= G^{-1} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ &= G^{-1} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишемо закон Гука для об'ємної деформації:

$$\sigma = K\theta, \quad (14)$$

де  $K$  – об'ємний модуль.

Звідси з урахуванням (13) отримаємо:

$$G^{-1} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{K}, \quad (15)$$

$$\text{звідки маємо: } \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{K} - G^{-1} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (16)$$

Неважко показати, що в циліндричній системі координат оператор Лапласа має вигляд:

$$\nabla^2 \sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}. \quad (17)$$

Оскільки в нашому випадку  $\sigma$  не залежить від координати  $z$ , рівняння (16) можемо записати таким чином:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{K} - G^{-1} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \nabla^2 \sigma. \quad (18)$$

Інтегруючи останній вираз по  $z$  від  $-h/2$  до  $h/2$ , після нескладних перетворень отримуємо зміну відстані між металевими пластинами:

$$\delta = \frac{\sigma}{K} h - \frac{h^3}{12G} \nabla^2 \sigma. \quad (19)$$

Оскільки величина  $\delta$  відома, співвідношення (19) є диференціальним рівнянням, що визначає розподіл гідростатичного тиску.

Отже, напружений стан повністю визначається розв'язком рівняння

$$\nabla^2 \sigma - \alpha^2 \sigma = -\alpha^2 K \delta / h, \quad (20)$$

де  $\alpha^2 = 12G/(Kh^2)$ , що відповідає граничній умові:

$$\sigma|_{r=R} = 0. \quad (21)$$

При цьому дотичне напруження на границі метал – гума пов'язане з величиною  $\sigma$  таким чином:

$$\tau = \frac{h}{2} \text{grad} \sigma. \quad (22)$$

Відзначимо, що рівняння (20) відрізняється від аналогічного рівняння для нестисливого матеріалу другим доданком у лівій частині.

Враховуючи той факт, що розглядувана задача є симетричною відносно осі  $z$ , рівняння (20) можемо переписати у вигляді:

$$\frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{dr} - \alpha^2 \sigma = -\alpha^2 K \delta / h. \quad (23)$$

Рівняння (23) є неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням, загальний розв'язок якого можна представити у вигляді:

$$\sigma = \sigma_{з.о.} + \sigma_{ч.}, \quad (24)$$

де  $\sigma_{з.о.}$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;  $\sigma_{ч.}$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Неважко побачити, що величина  $K\delta/h$  задовольняє рівнянню (23), тобто маємо:

$$\sigma_{ч.} = K\delta/h. \quad (25)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{dr} - \alpha^2 \sigma = 0 \quad (26)$$

будемо шукати у вигляді ряду

$$\sigma_{з.о.} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \quad (27)$$

Підставляючи вираз (27) у рівняння (26), маємо таке:

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 r + 4 \cdot 3 \cdot a_4 r^2 + \dots + \frac{1}{r} [1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 r + 3 \cdot a_3 r^2 + \dots] - \alpha^2 [a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots] = 0. \quad (28)$$

Збираючи коефіцієнти при однакових ступенях  $r$ , отримаємо:

$$\frac{a_1}{r} + (2 \cdot 1 \cdot a_2 + 2a_2 - \alpha^2 a_0) \cdot r^0 + (3 \cdot 2 \cdot a_3 + 3a_3 - \alpha^2 a_1) r + (4 \cdot 3 \cdot a_4 + 4a_4 - \alpha^2 a_2) r^2 + \dots + [k(k-1)a_k + ka_k - \alpha^2 a_{k-2}] r^k + \dots = 0. \quad (29)$$

Для того, щоб ця рівність мала місце для будь-яких  $r$ , потрібно виконання таких співвідношень:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \\ 2^2 a_2 - \alpha^2 a_0 &= 0; \\ 3^2 a_3 - \alpha^2 a_1 &= 0; \\ 4^2 a_4 - \alpha^2 a_2 &= 0; \\ &\dots \\ k^2 a_k - \alpha^2 a_{k-2} &= 0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (30)$$

Звідси вочевидь маємо:

$$a_n = \begin{cases} \alpha^2 / n^2 a_{n-2}, & n = 2k + 2; \\ 0, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (31)$$

Підставляючи вирази для коефіцієнтів ряду у (27), отримуємо:

$$\sigma_{z.o.} = a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^2}{n^2} a_{n-2} r^n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(2k)^2} a_{2k-2} r^{2k}. \quad (32)$$

З огляду на те, що формула (31) для парних індексів є рекурентною, можемо виразити будь-який коефіцієнт через  $a_0$ , а саме:

$$a_{2n} = \frac{(\alpha^2)^n}{(2^2)^n (n!)^2} a_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Підставляючи цей вираз у (32), маємо:

$$\sigma_{z.o.} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2)^n}{(2^2)^n (n!)^2} r^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left( \frac{\alpha r}{2} \right)^{2n}. \quad (34)$$

Враховуючи відому властивість гамма-функції для невід'ємних цілих  $n$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (35)$$

та визначення модифікованої функції Бесселя першого роду

$$I_{\beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \beta + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m + \beta} \quad (36)$$

бачимо, що розв'язок (34) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{z.o.} = a_0 I_0(\alpha r). \quad (37)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (23) виглядатиме так:

$$\sigma = a_0 I_0(\alpha r) + K\delta/h. \quad (38)$$

Постійну  $a_0$  знайдемо, підставивши вираз (38) у граничну умову (21):

$$0 = a_0 I_0(\alpha R) + K\delta/h, \quad (39)$$

звідки маємо:

$$a_0 = -K\delta/[hI_0(\alpha R)]. \quad (40)$$

Отже, остаточно розв'язок розглядуваної задачі має вигляд:

$$\sigma = \frac{K\delta}{h} \left[ 1 - \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)} \right]. \quad (41)$$

Повне осьове навантаження на гумовий елемент визначається таким чином:

$$P = 2\pi \int_0^R \sigma r dr = P_0 \varphi(\alpha R), \quad (42)$$

де

$$P_0 = \pi R^2 K\delta/h, \quad \alpha R = \sqrt{12G/K} R/h, \quad (43)$$

$$\varphi(\alpha R) = 1 - \frac{2}{\alpha R} \frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)}. \quad (44)$$

Величина  $P_0$  є силою, яка б сприймалася елементом при одноосьовій деформації, тобто якщо б переміщення у поперечних перерізах були заборонені та стиск здійснювався тільки за рахунок зміни об'єму. Коефіцієнт  $\varphi < 1$  характеризує зменшення жорсткості за рахунок деформацій зсуву.

При значеннях  $\alpha R < 1$  у степеневих рядах для функцій Бесселя можна залишити лише два члени. Тоді формула (42) набуває вигляду:

$$P = \frac{3}{2} \frac{G\pi R^4}{h^3} \delta, \quad (45)$$

що співпадає з формулою, отриманою в [1] для нестисливого матеріалу.

Співставлення формул (42) і (45) показує, що при розрахунку жорсткості тонкошарових елементів припущення про нестисливість гуми може бути використане з помилкою, що не перевищує 10 %, при  $\alpha R < 0,8$  або, вважаючи  $K/G = 5 \cdot 10^3$ , при відношенні  $R/h < 16$ .

При великих значеннях аргументу модифіковані функції Бесселя можуть бути замінені експонентами. Тоді вирази для нормальних і дотичних напружень запишуться так:

$$\sigma = \frac{K\delta}{h} [1 - e^{-\alpha(R-r)}], \quad \tau = \sqrt{3GK} \frac{\delta}{h} e^{-\alpha(R-r)}. \quad (46)$$

Звідси випливає, що при великих значеннях  $\alpha R$  навантаження на елемент при стисненні його на величину  $\delta$  можна обчислювати за формулою одноосьового стиску, зменшивши його радіус на еквівалентну ширину крайового ефекту  $d$ :

$$P = K \frac{\delta}{h} \pi (R - d)^2, \quad d = 1/\alpha = h \sqrt{K/(12G)}. \quad (47)$$

На практиці формулами (47) можна користуватися при  $\alpha R > 2$ .

**Експериментальні дослідження.** Раніше [2] були проведені експериментальні дослідження тонкошарових гумометалевих елементів під дією стискаючого навантаження. Досліджувались елементи циліндричної форми діаметром 200 мм з різною товщиною гумового шару  $h_p$  (табл. 1) з привулканізованою металевою арматурою. У таблиці прийняті такі позначення:  $h_m$  – товщина металу;  $n$  – кількість елементів у стопці;  $P$  – сила при стиску елементів;  $\Delta$  – деформація стопки елементів;  $C$  – статична жорсткість стопки елементів при стиску й витримці її під навантаженням не менш 30 хв. Елементи виготовлялися з середньонаповненої гуми типу 2959.

Дослідження проводилися на універсальному стенді FP100/1 з автоматичним записом кривої «навантаження-деформація». Попередньо всі елементи піддавалися тренуванню: трикратному деформуванню з наступним розвантаженням, швидкість навантаження 0,2 мм/с.

Результати випробувань наведені в табл. 1 та на рис. 1.

З рис. 1 бачимо, що в тонкошарових елементах при  $R/h_p > 10$  виникає об'ємний стиск.

Таблиця 1 – Результати випробувань

№	$h_p$ , мм	$n$	$\Delta$ , мм	$P$ , кгс	$R/h_p$	$C$ , кгс/см	$h_m$ , мм
1	40	1	2	2100	2,5	1050	5
2	20	2	2	5000	5	2500	5
3	10	4	2	10000	10	5000	5
4	5	8	2	10800	20	5400	5

Розглянемо конкретний приклад стиску гумометалевого елемента діаметром 200 мм і товщиною гумового шару 5 мм; умовно-рівноважний модуль зсуву  $G_\infty = 9$  кгс/см<sup>2</sup>, об'ємний модуль  $K = 30000$  кгс/см<sup>2</sup>. У цьому випадку  $\alpha R = 1,2$ . Тоді осьове навантаження на елемент потрібно розраховувати за формулами (42)-(44). Розраховане таким чином значення  $P$  дорівнює 11038 кгс, що задовільно співпадає з експериментальними даними (див. табл. 1).

**Висновки.** 1. Розроблено алгоритм розрахунку тонкошарових гумометалевих елементів з урахуванням стисливості матеріалу.

2. Розроблений алгоритм застосовано до розрахунку гумометалевого елемента зі співвідношенням розмірів  $R/h = 20$ , при якому виникає об'ємний стиск. Розрахована величина

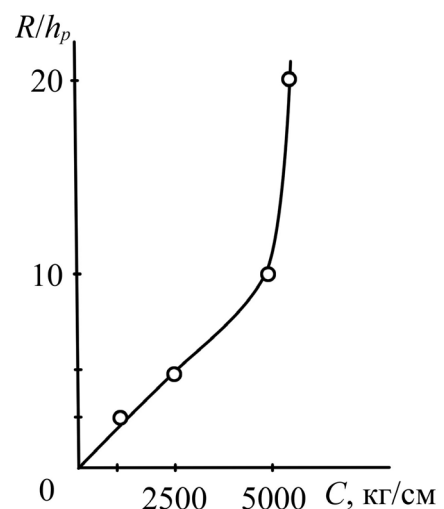


Рисунок 1 – Залежність  $R/h \sim C$



осьового навантаження з достатньою точністю співпадає з експериментом.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бидерман В.Л., Мартянова Г.В. Сжатие низких резинометаллических амортизаторов и прокладок. *Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение*. 1962. №3. С. 154-158.
2. Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е., Лисица Н.И., Лисица Н.Н., Рыжков И.Е., Ильюшонков В.В., Тымко Н.В. Некоторые особенности расчета резинометаллических элементов с учетом эффекта объемного сжатия. *Геотехническая механика*. 2005. Вып. 60. С. 152-158.
3. Дирда В.І., Калганков Є.В., Цаніді І.М., Черній О.А., Толстенко О.В., Деркач О.Д., Кабат О.С. Особливості розрахунків гумометалевих елементів з урахуванням ефекту об'ємного стиску. *Геотехнічна механіка*. 2018. Вип. 138. С. 160-168. <https://doi.org/10.15407/geotm2018.01.160>

#### REFERENCES

1. Biderman, V.L. and Mart'yanova, G.V. (1962), "Compression of low rubber shock absorbers and spacers", *Izvestiya AN SSSR. Ser. Mekhanika i mashinostroyeniye*, no. 3, pp. 154-158.
2. Dyrda, V.I., Tverdokhlebl, T.Ye., Lisitsa, N.I., Lisitsa, N.N., Ryzhkov, I.Ye., Il'yushonok, V.V. and Tymko, N.V. (2005), "Some features of calculation of rubber-metal elements in view of effect of volume compression", *Geo-Technical Mechanics*, no. 60, pp. 152-158.
3. Dyrda, V.I., Kalhankov, Ye.V., Tsanidi, I.M., Cherniy, O.A., Tolstenko, O.V., Derkach, O.D. and Kabat, O.S. (2018), "Specificity of rubber-metal elements calculation with taking into account effect of bulk compression", *Geo-Technical Mechanics*, no. 138, pp. 160-168. <https://doi.org/10.15407/geotm2018.01.160>

#### Про авторів

**Булат Анатолій Федорович**, академік Національної академії наук України, доктор технічних наук, професор, директор інституту, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України (ІГТМ НАН України), м. Дніпро, Україна, [gtm.bulat@gmail.com](mailto:gtm.bulat@gmail.com)

**Дирда Віталій Ілларіонович**, доктор технічних наук, професор, завідувач відділу механіки еластомерних конструкцій гірничих машин, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України (ІГТМ НАН України), м. Дніпро, Україна, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Новікова Аліна Вячеславівна**, магістр, молодший науковий співробітник відділу механіки еластомерних конструкцій гірничих машин, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України (ІГТМ НАН України), м. Дніпро, Україна, [alina.goncharenko@gmail.com](mailto:alina.goncharenko@gmail.com)

**Гребенюк Сергій Миколайович**, доктор технічних наук, завідувач кафедри фундаментальної математики, Запорізький національний університет (ЗНУ), Запоріжжя, Україна, [gsm1212@ukr.net](mailto:gsm1212@ukr.net)

**Лاپін Володимир Олексійович**, кандидат технічних наук, член-кореспондент Національної Інженерної Академії Республіки Казахстан та Міжнародної Інженерної Академії, директор Центру наукових досліджень будівельної галузі, Казахський науково-дослідний та проектний інститут будівництва і архітектури, м. Алмати, Казахстан, [vlapin@kazniisa.kz](mailto:vlapin@kazniisa.kz)

**Мар'єнков Микола Григорович**, доктор технічних наук, завідувач відділу, ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій», Київ, Україна, [n.maryenkov@ndibk.gov.ua](mailto:n.maryenkov@ndibk.gov.ua)

#### About the authors

**Bulat Anatolii Fedorovich**, Academician of the National Academy of Science of Ukraine, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.), Professor, Director of the Institute, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Science of Ukraine, Dnipro, Ukraine, [gtm.bulat@gmail.com](mailto:gtm.bulat@gmail.com)

**Dyrda Vitalii Illarionovich**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Professor, Head of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Science of Ukraine, Dnipro, Ukraine, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Novikova Alina Viacheslavivna**, Master of Science, Junior Researcher of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Science of Ukraine, Dnipro, Ukraine, [alina.goncharenko@gmail.com](mailto:alina.goncharenko@gmail.com)

**Grebenuk Serhii Mykolaiovych**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Head of the Department of Fundamental Mathematics in Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, [gsm1212@ukr.net](mailto:gsm1212@ukr.net)

**Lapin Vladimir Alekseevich**, Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Director of Center for Scientific Research in Building Industry, Corresponding Member of International Engineering Academy and National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Kazakh Research and Design Institute of Construction and Architecture, Almaty, Kazakhstan, [vlapin@kazniisa.kz](mailto:vlapin@kazniisa.kz)

**Mariyankov Mykola Hryhorovych**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Head of the Department, State Enterprise "State Research Institute of Building Constructions", Kyiv, Ukraine, [n.maryenkov@ndibk.gov.ua](mailto:n.maryenkov@ndibk.gov.ua)

**Аннотация.** В некоторых конструкциях с резинометаллическими элементами резина нагружается таким образом, что гидростатическое напряжение в десятки раз больше напряжений сдвига. В этом случае игнорирование сжимаемости резины может привести к большим ошибкам при расчёте упругих и прочностных параметров резиновых изделий. К упругим элементам, для которых учёт сжимаемости материала существенен, относятся

тонкослойные резинометаллические элементы, у которых размеры в плане значительно больше толщины. Такие резинометаллические элементы используются для вибростойкости тяжёлых машин, зданий и сооружений.

В данной работе рассмотрено сжатие тонкослойного цилиндрического резинометаллического элемента с учётом сжимаемости материала. При расчёте приняты предположения, что гидростатическое напряжение постоянно по толщине резинового слоя, а также что скоростью изменения компонент перемещения в срединной поверхности слоя можно пренебречь по сравнению с соответствующей скоростью в направлении нормали к слою. Эти предположения обоснованы в результате анализа геометрии деформации и условий равновесия тонкого слоя резины, скрепленного с металлической арматурой.

В результате применения этих предположений к решению поставленной задачи получена краевая задача для обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Соответствующее однородное уравнение решено при помощи степенного ряда, коэффициенты которого выражены через предыдущие при помощи рекуррентной формулы. Окончательно для гидростатического напряжения получена формула с модифицированной функцией Бесселя первого рода. Анализ полученной формулы приводит к некоторым упрощениям для разных значений безразмерного параметра, который связывает объёмный модуль и модуль сдвига, а также радиус цилиндрического элемента и его толщину.

Полученная осевая нагрузка на резиновый элемент представлена силой, которая воспринималась бы элементом при одноосевой деформации, т.е. если бы перемещения в поперечных сечениях были запрещены и сжатие производилось бы только за счёт изменения объёма, умноженной на некоторый коэффициент, меньший единицы, который учитывает уменьшение жесткости элемента за счет деформации сдвига.

В работе приведены также результаты экспериментальных исследований, выполненных авторами, для тонкослойных цилиндрических резинометаллических элементов из средненаполненной резины 2959. Приведён пример расчёта осевой нагрузки на тонкослойный элемент с учётом сжимаемости резины. Полученное значение осевой нагрузки совпадает с результатами эксперимента с достаточным значением точности.

**Ключевые слова:** тонкослойный резинометаллический элемент, сжимаемость резины, гидростатическое напряжение, осевая нагрузка

**Abstract.** In some constructions with rubber-metal elements, the rubber is loaded in such a way that the hydrostatic stress is tens of times greater than the shear stress. In this case, ignoring the compressibility of rubber can lead to large errors in calculating the elastic and strength parameters of rubber parts. The elastic elements, for which consideration of the material compressibility is essential, include thin-layer rubber-metal elements, whose dimensions in plan are much larger than the thickness. Such rubber-metal elements are used for vibration and seismic protection of heavy machines, buildings and structures.

In this paper, the compression of a thin-layer cylindrical rubber-metal element is considered with taking into account the compressibility of the material. In the calculation, it was assumed that the hydrostatic stress is constant over the thickness of the rubber layer, and also that the rate of change of the displacement components in the middle surface of the layer can be neglected in comparison with the corresponding speed in the direction normal to the layer. These assumptions were substantiated as a result of the analysis of the geometry of deformation and equilibrium conditions of a thin layer of rubber bonded to metal reinforcement.

As a result of applying these assumptions to the solution of the problem set, a boundary value problem is obtained for an ordinary inhomogeneous linear differential equation of the second order. The corresponding homogeneous equation is solved using a power series, the coefficients of which are expressed in terms of the previous ones using a recurrent formula. Finally, a formula with a modified Bessel function of the first kind is obtained for the hydrostatic stress. The analysis of the obtained formula leads to some simplifications for different values of the dimensionless parameter, which connects the bulk modulus and shear modulus, and the radius of the cylindrical element and its thickness.

The resulting axial load on the rubber element is represented by the force that would be perceived by the element in case of uniaxial deformation, i.e. if displacements in cross-sections were prohibited and compression would be performed only due to the change in volume, multiplied by a certain coefficient less than one, which takes into account the decrease in the stiffness of the element due to shear deformation.

The paper also presents the results of experimental studies carried out by the authors for thin-layer cylindrical rubber-metal elements made of medium-filled rubber 2959. An example of calculating the axial load on a thin-layer element considering the compressibility of rubber is given. The obtained axial load value coincides with the experimental results with a sufficient accuracy value.

**Keywords:** thin-layer rubber-metal element, rubber compressibility, hydrostatic stress, axial load

*Стаття надійшла до редакції 14.01.2021*